

文章编号:1000-8055(2011)05-1135-07

## 某超高速转子系统减振结构研究

陈巍<sup>1,2</sup>, 杜发荣<sup>2</sup>, 丁水汀<sup>2</sup>, 韩树军<sup>2</sup>, 李云清<sup>2</sup>

(1. 中国科学院工程热物理研究所, 北京 100190;

2. 北京航空航天大学交通科学与工程学院, 北京 100191)

**摘 要:** 为解决某超高速转子系统的失稳碰摩问题, 以干摩擦阻尼耗散转子涡动能量理论为依据, 采用一种自由安装式干摩擦片减振结构(干摩擦阻尼器)。该结构在转轴上安装波形弹性垫片及干摩擦片, 通过螺母预紧力矩向波形弹性垫片及各干摩擦片提供轴向正压力。干摩擦片随转子振动并产生相对运动, 从而耗散转子涡动能量, 达到减振、增强转子稳定性的目的。通过实验不同数量的干摩擦片和不同预紧力矩的组合寻找满足工程稳定性的减振器结构参数。结果表明: 干摩擦阻尼器适用于高速、轻载转子系统的减振、增稳, 可以有效降低转子振动, 控制转子涡动发散的趋势; 所用实验方法有助于快速获得满足工程稳定性的减振结构参数。

**关 键 词:** 超高速转子; 减振结构; 干摩擦阻尼器; 稳定性; 转子振动

**中图分类号:** V263.4

**文献标志码:** A

## Research on vibration absorber for a super-high speed rotor system

CHEN Wei<sup>1,2</sup>, DU Fa-rong<sup>2</sup>, DING Shui-ting<sup>2</sup>, HAN Shu-jun<sup>2</sup>, LI Yun-qing<sup>2</sup>

(1. Institute of Engineering Thermophysics,

Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China;

2. School of Transportation Science and Engineering,

Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

**Abstract:** A kind of freely assembled dry friction vibration absorber was presented to solve the problems of instability and rubbing faults for a super-high speed rotor system based on theory of dry friction dissipating energy from rotor vibration. In this structure, a wave-shaped elastic pad and some dry friction pads were freely assembled on shaft, and axial normal force was provided for elastic pad and dry friction pads by pre-loaded moment for nut. When friction pads moved with shaft, the relative movements between them could dissipate vibration energy from rotor system, absorb vibration and enhance system stability. The configuration format meeting the stability in engineering for the damper of the studied rotor system has been acquired by testing different groups of dry friction pads and pre-loaded moment. The results show that dry friction damper is suitable for high speed and light loaded rotor system to restrain vibration and enhance its stability. The testing routine is helpful to find a comfortable configuration format in engineering of dry friction damper.

**Key words:** super-high speed rotor; vibration absorber; dry friction damper; stability; rotor vibration

收稿日期:2010-03-16; 修订日期:2010-07-01

基金项目:国家 985 工程项目

作者简介:陈巍(1980—),男,河北景县人,助理研究员,博士,研究方向为转子动力学、振动与测试。

微型动力系统以低成本、高能量密度、可移动性等特点,在分布式能源领域有着广阔的应用前景.国内外都在积极从事相关产品或技术的研发,比如,美国麻省理工学院(MIT)正在研发的超微型燃气涡轮发电机系统,转速达到 20 000 r/s,发电功率为 10 W,计划用于替代传统的计算机电池.国内近 10 年来也致力于作为无人机动力系统的微型涡喷发动机的研究,并已取得阶段性成果.对于微型动力系统而言,保证高速条件下的转子系统稳定性是所面临的普遍而关键性的课题.

本文的研究对象为某微型涡喷发动机转子系统,其最高转速为 100 000 r/min,推力为 245 N.该发动机在地面试车过程中,在高速区内的转静件频繁出现碰摩现象,严重时曾导致零部件损坏.碰摩的原因常包括以下几种:不平衡质量过大,造成高速时振动幅值超过转静件间隙值;热条件下支撑件刚度降低,造成转子位移增大;初弯、裂纹等转子件故障造成的失稳;外界激励引起的瞬态响应过大造成的碰摩等.因此,航空发动机设计中常利用减振器克服这些问题.

对于大型航空发动机设计,已有或在研的减振器形式有挤压油膜式、金属橡胶式、鼠笼式支撑、磁流变液式、电流变液式、电磁式等.但以上这些结构的简易性、成本、质量等不符合微型发动机的使用要求.需要寻求一种结构简单、成本低、质量轻、安装简便的减振器形式以满足微型发动机的减振要求.干摩擦阻尼器具有上述特点,并在核电站基础设施、高层建筑地震基础隔离、铁路公路悬挂系统等领域广泛应用.目前,涡轮机叶片、建筑隔振和交通运输系统是研究干摩擦较为活跃的领域<sup>[1-13]</sup>.文献[1]提出了一种类似于刹车片装置的动静式干摩擦减振器,并对其有效性进行了定性实验.文献[7]对利用叶片中填充的颗粒间干摩擦产生的阻尼效应的减振效果进行了实验研究,证明了其有效性.文献[8-13]对火车轮轨减振中使用的干摩擦阻尼器减振原理进行了详细的理论研究,包括单自由度模型、多自由度模型、结构稳定性、声振特性及结构参数优化等内容.

本文针对研究对象的结构特点及减振需求,设计了某型干摩擦阻尼器,从理论上研究了干摩擦阻尼耗散转子涡动能机理,并对其有效性和满足工程稳定性的参数配置进行了实验研究.

## 1 转子结构及减振原理

图 1 为发动机转子系统结构,图 2 为装有干

摩擦阻尼器的转子系统示意图.转子系统采用 0-2-0 式支撑,考虑到装配和结构简单的原则,将阻尼器设置在压气机端轴承和轴套(图 2)之间.干摩擦阻尼系统安装方式为:从轴套左侧到压气机叶轮间依次是摩擦片、弹性垫片、摩擦片、轴承.其中,弹性垫片两侧的摩擦片数量可以调整,但总厚度不得超过轴向间隙调整值.

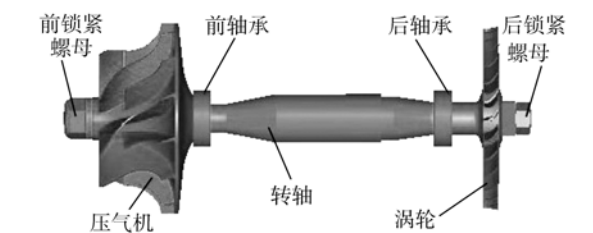


图 1 转子系统结构

Fig. 1 Structure of rotor system

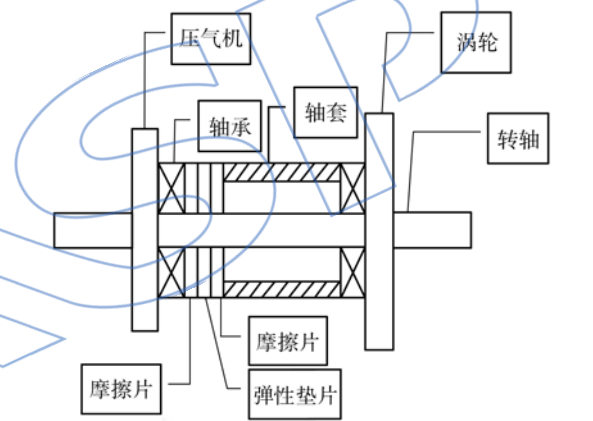


图 2 减振阻尼器结构示意图

Fig. 2 Configuration of vibration damper

通过对前锁紧螺母施加预紧力矩产生轴向预紧力,使弹性垫片产生初始变形和弹性力,该弹性力即为产生摩擦力所需的正压力.摩擦片工作时,随转子涡动主要产生横向(发动机截面两个方向)和绕轴转动 3 个自由度(不考虑轴向运动)的运动,由相对运动产生的干摩擦阻尼效果将转子涡动能耗散掉,达到减振的目的.

## 2 干摩擦阻尼耗散涡动能机理

本节从运动学角度分析干摩擦阻尼耗散涡动能机理.依据干摩擦阻尼器减振原理,建立干摩擦运动模型,并对干摩擦阻尼耗散涡动能机理进行理论研究,模型如图 3 所示.  $M$  代表转子振动中制造牵连运动的质量,  $m$  代表干摩擦片中产生随动运动的质量,两者之间的相对运动过程即为阻尼耗散涡动能的过程.  $N$  为两者之间的正压力,

位移随时间的变化规律分别用  $x_0(t)$  和  $x_1(t)$  表示,牵连运动表示为正弦运动规律,如式(1),  $A$  为运动幅值. 研究中认为动摩擦力和静摩擦力相等.

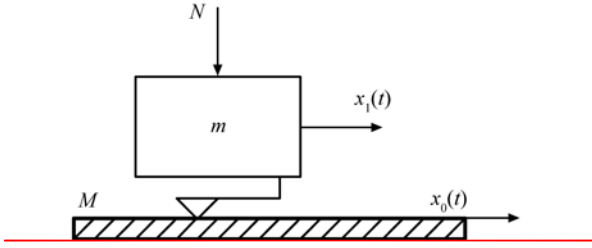


图3 干摩擦运动模型

Fig. 3 Dry friction model

实际运动中,随牵连运动加速度、速度矢量的改变,两者的运动状态包括粘连运动(无相对位移)和相对滑动(有相对位移)交替进行. 令时段  $[0, t_1]$  内为粘连运动,此时  $m$  的运动状态量由式(2)表示. 两者加速度相同时处于发生相对滑动的临界状态,有式(3)成立,  $F$  为摩擦力,  $f$  为无量纲摩擦因数<sup>[8]</sup>.  $|f| \geq 1$  时对应粘连运动状态,  $|f| < 1$  时为相对滑动状态,式中正负号与基础加速度方向相反. 令  $[t_1, t_2]$  为相对滑动时段,期间  $m$  的运动状态由式(4)表示. 滑动状态进行至两者速度大小相同时进入粘连运动状态,由此临界条件得式(5),其维持时段为  $[t_2, t_3]$ . 其后,加速度相同时又进入相对滑动状态,时间段为  $[t_3, t_4]$ . 至此,描述了牵连运动一个运动周期内产生的随动运动状态.

$$x_0(t) = A \sin(\omega t) \quad (1)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \dot{x}_0(t) = \omega A \cos(\omega t) \\ \ddot{x}_1(t) = \ddot{x}_0(t) = -\omega^2 A \sin(\omega t) \end{cases} \quad (2)$$

$$a_1 = \frac{F}{m} = a_0 = -\omega^2 A \sin(\omega t_1)$$

$$\sin(\omega t_1) = \pm \frac{F}{\omega^2 A m} = \pm f \quad (3)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \omega A [\mp \omega f(t - t_1) + \cos(\omega t_1)] \\ \ddot{x}_1(t) = \mp f \omega^2 A \end{cases} \quad (4)$$

$$\dot{x}_1(t_2) = \dot{x}_0(t_2)$$

$$\omega f(t_2 - t_1) = \pm [\cos(\omega t_1) - \cos(\omega t_2)] \quad (5)$$

由前述可知,干摩擦阻尼器耗散涡动能的过程是依靠摩擦片间的相对运动进行的,即这里所说的相对滑动过程. 因此,摩擦片周期运动中的相对滑动状态越多,阻尼器减振效果就越好. 实际应用中,当正压力  $N$  大小合适时,是可以将周期运动中的粘连运动去除,而只有相对滑动运动的,这也是工程中所期望达到的状态. 由此条件,可得到式(6)和式(7)成立,且联立式(3), (5), (6)得到满

足全周期纯相对滑动状态的临界  $f_c$  值为式(8)所示. 即  $f < f_c$  时运动状态始终为滑动运动;  $f \geq f_c$  时,运动状态为粘连-滑动的混合模式. 联立式(5)和式(6)得式(9)成立.

$$t_2 = t_3 = t_1 + \pi/\omega; \quad t_4 = t_1 + 2\pi/\omega \quad (6)$$

$$\sin(\omega t_2) = -f \quad (7)$$

$$f_c = \sqrt{1/(1 + \pi^2/4)} = 0.537 \quad (8)$$

$$f = \frac{2}{\pi} \cos(\omega t_1) \quad (9)$$

此时,在转子涡动的一个周期内,阻尼器耗散涡动能数值由式(10)表示,计算得式(11),其无量纲表达式为式(12)<sup>[8]</sup>. 至此,以  $f_c = 0.537$  为分界线,低于  $f_c$  为纯滑动区,高于  $f_c$  为粘连-滑动混合摩擦状态. 对于前者,将式(6)和式(9)代入式(12)得计算表达式(13). 对于后者,联立式(3), (5), (12)进行数值求解并绘图. 即任取定值  $\omega = 10 \text{ rad/s}$ ,  $f$  在  $[0, 1]$  内,以步长 0.001 步进取值,在  $f$  的每次取值中,由式(3)解得  $t_1$ ,代入式(5)解得  $t_2$ ,将计算值带入式(12)解得无量纲耗散能  $e$ . 经以上数值求解和解析求解过程后,绘制  $e$  随摩擦因数  $f$  变化的曲线,如图4所示.

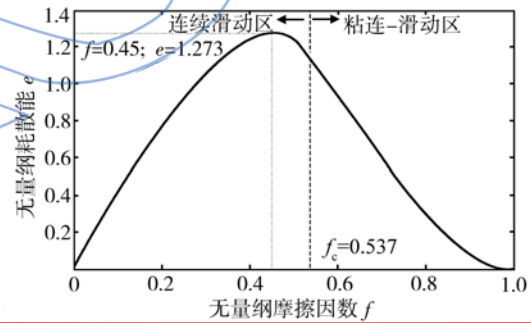


图4 耗散能与摩擦因数关系

Fig. 4 Relationship between  $e$  and  $f$ 

$$E = 2 \int_{t_1}^{t_2} -F(\dot{x}_0(t) - \dot{x}_1(t)) dt \quad (10)$$

$$E = 2m\omega^3 A^2 f(t_2 - t_1) \left[ \frac{\sin(\omega t_1) - \sin(\omega t_2)}{\omega(t_2 - t_1)} + \cos(\omega t_1) - \frac{\omega f}{2}(t_2 - t_1) \right] \quad (11)$$

$$e = \frac{E}{m\omega^2 A^2} =$$

$$2\omega f(t_2 - t_1) \left[ \frac{\sin(\omega t_1) - \sin(\omega t_2)}{\omega(t_2 - t_1)} + \cos(\omega t_1) - \frac{\omega f}{2}(t_2 - t_1) \right] \quad (12)$$

$$e = 4f \sqrt{1 - \frac{\pi^2 f^2}{4}} \quad (13)$$

讨论: ①图4中在临界点  $f_c = 0.537$  左侧为

连续滑动区,右侧为粘连-滑动区.在  $f=0.45$  处  $e$  值出现最大值  $e=1.273$ ,即最佳耗散涡动能的摩擦力配置出现在连续滑动运动区.摩擦因数超过临界值时,耗散涡动能效果反而减低.由此预测,摩擦片数目过多或轴端预紧力矩过大会导致减振能力下降.②无量纲摩擦因数  $f$  是一综合参数,体现了材料的摩擦因数和正压力综合作用结果.实用中使用的摩擦片材料为结构钢,摩擦因数基本固定.因此,摩擦片数量固定时,摩擦力大小主要由轴向预紧力调整.耗散能效果由摩擦片数目和预紧力联合控制.因此,图4中所示最佳摩擦因数或其附近区域是工程实用中追求的目标.③实用中摩擦片减振效果受表面粗糙度(初始表面粗糙度和使用过程中随损耗而变化的粗糙度降低使耗散能力降低)、油污附着(轴承润滑油粘附和燃油油雾的侵附会降低摩擦因数,降低耗散能力)、温度变化(发动机内环境温度升高和摩擦热导致的局部温度升高使表面材料软化,而使摩擦耗散能力下降)、局部粘着(表面不平度的凸峰在高温环境下剧烈摩擦导致局部熔融、粘着,提高耗散能力)等因素影响.理论研究中需添加多种修正系数,且难以准确定量描述耗散涡动能值,确定阻尼器最佳结构参数.因此,本文通过实验的方法,改变预紧力和摩擦片数量的组合,测量转子振动幅值,来评估阻尼器不同参数组合下减振效果的优劣,寻求相对较好的结构参数配置.

### 3 干摩擦阻尼器减振实验

#### 3.1 振动测试系统

用加速度传感器测取振动数据.机壳上布置3个加速度传感器,发动机底座布置2个加速度传感器.振动测试仪器为LMS830A信号分析仪.表1列出了传感器编号及测试振动方向.图5显示了传感器实际安装位置.采样频率为4096 Hz,频率分辨率为1 Hz.

表1 传感器位置

Table 1 Sensor locations

| 传感器号 | 测点位置  |
|------|-------|
| 1    | 发动机垂直 |
| 2    | 发动机水平 |
| 3    | 发动机轴向 |
| 4    | 底座水平  |
| 5    | 底座垂直  |

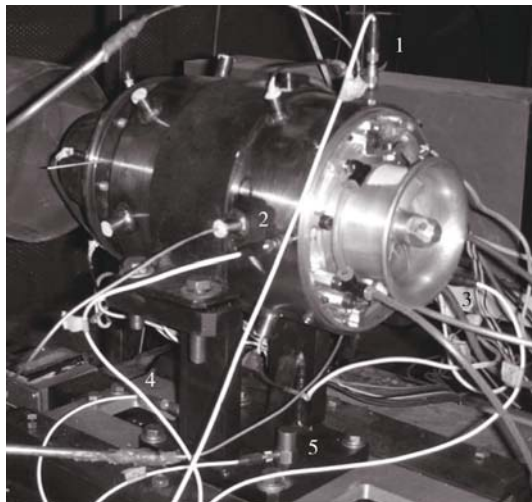


图5 实验台

Fig. 5 Test rig

#### 3.2 实验方案

试车过程采用起动、加速至慢车并停留、稳定后加速至工况点运行的试车方案.在没有确定高速区运转安全性的情况下采用较小的转速间隔提速,待确定该转速下运行稳定、安全后,升至下一转速.每次试车过程中,记录从起动到停车的振动数据.

实验拟采用通过组合不同摩擦片数目和不同预紧力矩的办法,测试不同装配状态下系统的振动情况,以此评估出较好的装配参数.实验装配参数由以下方法确定:根据转子系统轴向间隙值、现有加工水平(决定了摩擦片厚度),最多可以使用的摩擦片数量为5个;为保证阻尼效果,最少使用3个摩擦片.因此,实验用摩擦片数量定为3,4,5三种.阻尼器安装在压气机端,通过调整压气机端的螺母预紧力矩调整轴向正压力,选用的预紧力矩值为  $8\text{ N}\cdot\text{m}$  和  $12\text{ N}\cdot\text{m}$  两种.在相同预紧力矩下评估出相对较好的摩擦片数量参数;再通过固定摩擦片数量改变预紧力矩值选出合适的预紧力矩值,从而确定最优的装配参数组合.实验用装配参数组合见表2所示.

表2 实验装配状态

Table 2 Assembly states in experiments

| 参数                               | 状态 I | 状态 II | 状态 III | 状态 IV |
|----------------------------------|------|-------|--------|-------|
| 摩擦片数/个                           | 3    | 4     | 5      | 5     |
| 预紧力矩/( $\text{N}\cdot\text{m}$ ) | 8    | 8     | 8      | 12    |

#### 3.3 添加阻尼前的振动情况

发动机在高速区工作时,强迫振动过大导致

碰摩发生,使转静件损坏.图6为压气机导向器,周向磨损痕迹明显.图7给出了某次发生碰摩的试车过程的时域图(图中数据为有效值,下同).图中可见,碰摩期间的最大振动加速度有效值接近230 g.重新装机,加入阻尼片,布置相同振动测点后进行阻尼减振实验.

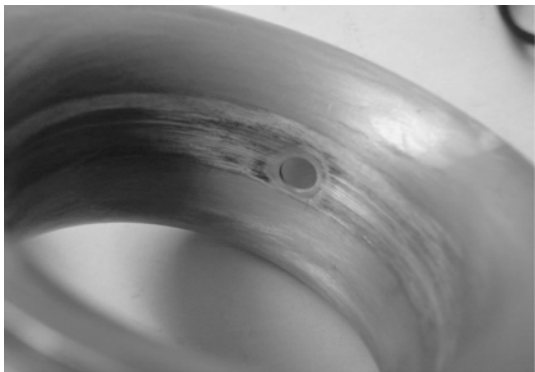


图6 压气机导向器

Fig. 6 Compressor director

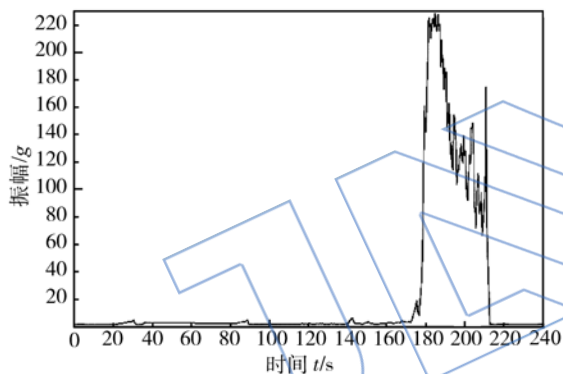


图7 时域图

Fig. 7 Time domain chart

### 3.4 添加阻尼后的振动情况

在使用阻尼器前,由于碰摩故障频发,无法完成既定的全速域实验内容.而在使用了这种阻尼结构后,碰摩现象得以消除,且顺利完成了地面试车中既定的实验内容.证明了其在微型涡喷发动机中减振、增稳的实际效果.

图8中示出了实验所使用的干摩擦片(灰色垫片)和波形弹性垫片(黑色垫片).图9为实际装配中阻尼器的安装示意图.减振实验分四组进行:分别使用3个、4个、5个摩擦片与一个4波弹性垫片配合,5摩擦片时有高低两种预紧力矩方式.按表2所示,I,II考察相同预紧力矩时摩擦片数量大小的优劣;III,IV考察相同摩擦片数量时预紧力矩大小的优劣;最后,根据四组振动数据值找出减振效果最佳的一组装配参数.

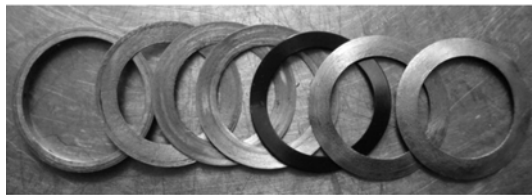


图8 弹性垫片和摩擦片

Fig. 8 Elastic pads and friction pads

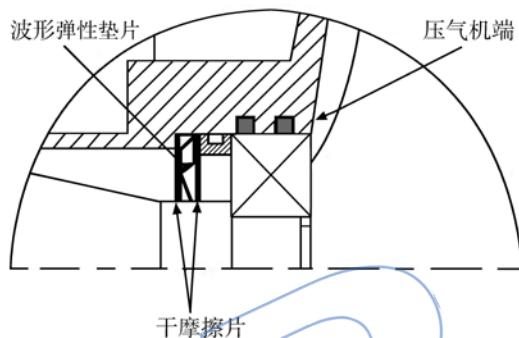


图9 阻尼器实际安装图

Fig. 9 Assembled damper in the engine

下文分析数据均采用发动机垂直方向测振数据.图10为装配状态I和II的时域振动比较图,时间段从起动到某工况转速下稳定运行状态.图中可见,状态II时,其振动有效值在全时域范围内均明显低于状态I.证明4个摩擦垫片的减振效果优于3个垫片,即II比I更接近图4中的最佳摩擦因数.

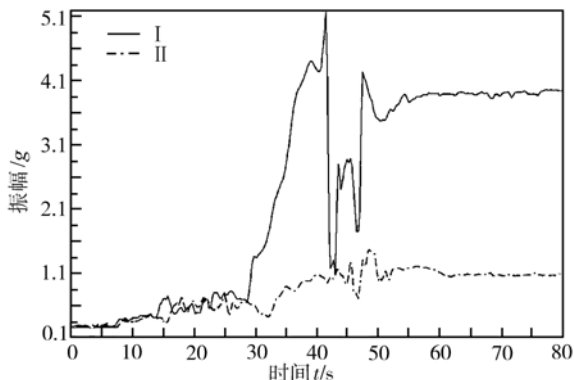


图10 垂直方向振动时域图

Fig. 10 Vertical vibration chart in time domain

进一步考察预紧力矩对阻尼效果的影响.重新装机并先后实验了5个摩擦片在不同预紧力矩时的减振情况.图11为两次实验结果的时域对比图,试车方案与图10相同.实线型曲线为状态IV,虚线型曲线为状态III.前者工况点时段平均振动接近3 g,后者接近1.25 g.预紧力矩提高,摩擦阻

尼效果应该增强,而振幅值却高于低预紧力矩状态.证明状态Ⅲ和Ⅳ分别位于图4中所示的临界摩擦因数 $f_c$ 的两侧,且状态Ⅳ已经相对处于了过阻尼状态,从而影响了减振效果.

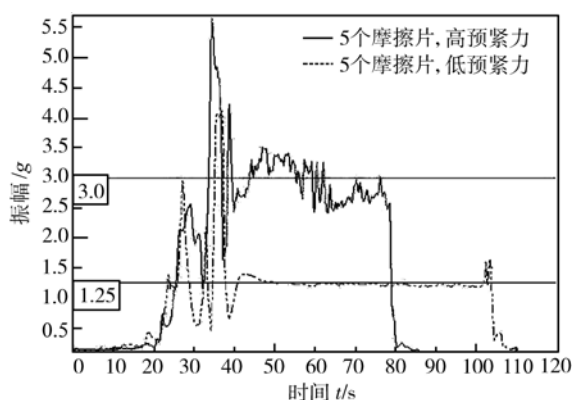


图11 状态Ⅲ和Ⅳ时域响应对比

Fig. 11 Contrast of III & IV response in time domain

最后,汇总相同工况转速下的实验数据(如表3),对比得出四组装配参数中相对最好的一组.由表中数据可知,装配状态Ⅱ时的减振效果相对更好.

表3 实验结果数据  
Table 3 Experiment data

| 状态  | 振幅/g    |
|-----|---------|
| I   | 3.7~3.8 |
| II  | 0.9~1.0 |
| III | 1.2~1.3 |
| IV  | 2.4~3.5 |

另外,本文研究对象为一次性短时寿命设计的发动机.为证明该自由安装式干摩擦阻尼器在发动机寿命周期内可以有效工作,实验中对同一组摩擦片在发动机寿命周期内的工作情况进行了跟踪.结果表明,在工作时间累计达到发动机寿命周期后,阻尼器仍可以正常工作.其磨损程度不影响减振效果.

### 3.5 讨论

①本文所述自由安装式干摩擦阻尼器适用于高速、轻质、轻载的转子系统,即对于千牛级以下的微型涡喷发动机可以采用与文中所述相同的结构形式与安装方式.因为目前国际上百牛顿推力级的涡喷发动机其转子系统结构、支撑方式基本类似,为这种阻尼减振器的使用提供了相似的使

用条件.千牛顿推力级的发动机其支撑形式、转子结构、振动能量量级、振型特征均大不相同,即便使用干摩擦阻尼器,也需要不同的结构形式与之匹配.②文中所述的实验方法,可为微型涡喷发动机设计中所提倡的模块化设计方法提供参考依据.通过实验研究获得不同推力(1000 N 以下)的发动机对应的阻尼器最优结构参数(干摩擦片数量、轴端预紧力矩),从而形成相应的数据库,为系列化微型涡喷发动机研究提供经验依据.③文中研究内容证明了干摩擦阻尼器的有效性,以此为实践依据,后续研究工作可以从理论公式估算所需干摩擦片数量的角度展开,来减少实验研究的工作量.即利用转子涡动能与摩擦片总耗散能相等的关系,结合单个摩擦面所提供的耗散能能力(参考式(10)~(13)),估算所需摩擦面个数,进而推出摩擦片数量.实验中可以该估算值为中心,进行验证,从而减少实验工作量.

## 4 结论

本文在微型分布式能源动力系统中常见的转静件碰摩这一工程背景下,以某微型涡喷发动机转子系统为研究对象,以解决该发动机地面试车中频繁出现的碰摩现象为研究目的,从理论上研究了干摩擦阻尼耗散转子涡动能的机理,采用并实验研究了适用于1000 N 以下推力级涡喷发动机转子系统的阻尼减振器,证明了该结构的有效性,并找出了适用于研究对象的能满足工程稳定性要求的阻尼器结构参数.研究过程可得到以下结论:

1) 自由安装式干摩擦阻尼器可用于1000 N 以下推力级的微型涡喷发动机,以起到减振、增稳、消除碰摩现象的作用.

2) 干摩擦阻尼器的减振效果主要与摩擦片数量、轴端螺母预紧力矩有关.摩擦片数量过多或预紧力矩过大,会造成过阻尼情况发生,使得摩擦因数过大,摩擦片间的摩擦运动进入粘连-滑动运动区,从而达不到相对理想的减振效果.

3) 实际应用中可根据以下方法实验比较出能满足工程稳定性的阻尼器结构参数:①根据转子系统轴向间隙值、加工水平、加工成本确定可能安装的最大干摩擦片数量;②根据发动机实际情况(不平衡质量、转速、转子质量等)确定能产生明显阻尼效果的最小干摩擦片数量;③根据发动机设计中,针对具体型号确定的装配标准,选取轴端螺母预紧力矩,并与干摩擦片数量搭配、分组,确

定实验方案;④按照既定分组实验并分析、比较相同工况转速下的振动数据,得出减振效果相对理想的阻尼器结构参数。

4) 无量纲摩擦因数综合体现了材料摩擦因数和正压力对耗散涡动能能力的影响,其与无量纲耗散能值的变化曲线可以指导干摩擦阻尼器结构参数选优、分析过程。

## 参考文献:

- [1] 范天宇. 弹性支撑干摩擦阻尼器减振研究[D]. 西安:西北工业大学, 2006.  
FAN Tianyu, Vibration reduction by elastic support dry friction damper[D]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University, 2006. (in Chinese)
- [2] 周年发. 某型发动机的减振与监控方法分析[J]. 航空发动机, 2007(增刊): 23-27.  
ZHOU Nianfa. Analysis for a engine vibration reduction and detection method[J]. Aeroengine, 2007(supplement): 23-27. (in Chinese)
- [3] 何衍宗. 柔性转子受简谐扭矩激励时的涡动[J]. 振动工程学报, 1991, 4(3): 1-9.  
HE Yanzong. Whirling of a flexible rotor excited by harmonic torque[J]. Journal of Vibration Engineering, 1991, 4(3): 1-9. (in Chinese)
- [4] 闻邦椿, 顾家柳, 夏松波, 等. 高等转子动力学[M]. 北京: 机械工业出版社, 2000.
- [5] Rodriguez C G, Egusquiza E, Santos I F. Frequencies in the vibration induced by the rotor stator interaction in a centrifugal pump turbine[J]. Journal of Fluid Engineering, 2007, 129(11): 1428-1435.
- [6] Green I, Casey C. Crack detection in a rotor dynamic system by vibration monitoring Part I: analysis[J]. Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, 2005, 127(2): 425-436.
- [7] 夏兆旺, 单颖春, 刘献栋, 等. 颗粒阻尼应用于平板叶片减振试验[J]. 振动测试与诊断, 2008, 30(3): 269-272.  
XIA Zhaowang, SHAN Yingchun, LIU Xiandong, et al. Particle damping tests on cast steel plates[J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2008, 30(3): 269-272. (in Chinese)
- [8] Lopez I, Busturia J M, Nijmeijer H. Energy dissipation of a friction damper[J]. Journal of Sound and Vibration, 2004, 278(3): 539-561.
- [9] Den Hartog J P. Forced vibrations with combined coulomb and viscous friction[J]. Applied Mechan. J. AMSE, 1931, 53: 107-115.
- [10] Pratt T K, Williams R. Nonlinear analysis of stick/slip motion[J]. Journal of Sound and Vibration, 1981, 74(4): 531-542.
- [11] Akay A. Acoustics of friction[J]. Journal of the Acoustical Society of America, 2002, 111(4): 1525-1548.
- [12] Beards C F, Woowat A. The control of frame vibration by friction damping in joints[J]. Journal of Vibration, Acoustics Stress and Reliability in Design, 1985, 107(1): 27-32.
- [13] Deimling K, Szilágyi P. Periodic solutions of dry-friction problems[J]. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik(ZAMP), 1994, 45(1): 53-60.